Exercice 1 $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$; $n \in \mathbb{N}$

a/ Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, $n \geq 1$

b/ Calculer I_0 et en déduire la valeur de I_n en fct de n

Exercice 2 $J_n = \int_0^x \frac{t^n e^t}{n!} dt$; $n \in \mathbb{N}$

a/ Calculer J_1

b/ Etablir une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} ; $n \geq 2$

c/ Calculer J_n en fonction de n

Exercice 3 ; $n \in \mathbb{N}$; $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$

a/ Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_n$ et donner un encadrement simple de I_n

b/ En déduire que la suite (I_n) est convergente

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$

(Etudier la fct : $x \longmapsto x - x^2$ sur $[0,1]$. Donner alors $\lim_{\infty} I_n$

Exercice 4 $I_n = \int_0^1 \frac{x}{1-x^n} dx$; $n \in \mathbb{N}$

a/ Calculer I_1. Que vaut I_2 ?

b/ Quelle est la monotonie de la suite (I_n)

la suite (I_n) est elle convergente

c/ Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\int_0^1 x(1-x^n) dx \leq I_n \leq \int_0^1 x\, dx$

Calculer $\lim_{\infty} I_n$

ETUDUP .com

Exercice. 1/ $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$ (avec $n \geq 1$)

a/. On pose $u = x^n$ et $v' = \sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$

d'où $u' = n x^{n-1}$ et $v = -\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2} = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$

$$I_n = \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\cdot x^n\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2}{3} n x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\, dx$$

$$I_n = \frac{2}{3} n \int_0^1 (x^{n-1} - x^n)\sqrt{1-x}\, dx = \frac{2}{3} n (I_{n-1} - I_n)$$

$$I_n = \frac{2}{3} n I_{n-1} - \frac{2}{3} n I_n \Rightarrow 3 I_n = 2n I_{n-1} - 2n I_n \Rightarrow$$

$$\forall n \geq 1 : \quad I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$$

b/ $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = \int_0^1 (1-x)^{1/2} dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

On a :

$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$

$I_{n-1} = \frac{2n-2}{2n+1} I_{n-2}$

$I_{n-2} = \frac{2n-4}{2n-1} I_{n-3}$

$\vdots$

$I_3 = \frac{6}{9} I_2$

$I_2 = \frac{4}{7} I_1$

$I_1 = \frac{2}{5} I_0$

en faisant le produit membre à membre

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}\cdot\frac{2n-2}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{6\times4\times2}{9\times7\times5}\cdot I_0$$

$$I_n = \frac{(2n+2)(2n)^2(2n-2)^2\ldots\times6^2\times4^2\times2^2\times2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)\ldots\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times2}$$

$$I_n = \frac{2(n+1)\left[(2n)(2n-2)\ldots\times6\times4\times2\right]^2\times2}{(2n+3)!}$$

$$I_n = \frac{2^2(n+1)\left((2\times n)(2(n-1))\ldots(2\times3)(2\times2)\times2\times1\right)^2}{(2n+3)!}$$

$$I_n = \frac{2^{2n+2}(n+1)\cdot(n!)^2}{(2n+3)!}$$

Exercice 2

a/ $J_1 = \int_0^x \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{1-t}}_{v'}\, dt = \left[-t e^{1-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{1-t}\, dt = -x e^{1-x} + \left[-e^{1-t}\right]_0^x$

$= -(1+x)e^{1-x} + e$

b/ On pose $\begin{cases} u = t^n \\ v' = e^{1-t} \end{cases}$ $\begin{cases} u' = n t^{n-1} \\ v = -e^{1-t} \end{cases}$

$$J_n = \left[-t^n e^{1-t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-n t^{n-1} e^{1-t}}{n!}\, dt = -x^n e^{1-x} + J_{n-1}$$

ETUDUP .com

c/ On a
$$\begin{cases} J_n = -x^n e^{1-x} + J_{n-1} \\ J_{n-1} = -x^{n-1} e^{1-x} + J_{n-2} \\ \vdots \\ J_3 = -x^3 e^{1-x} + J_2 \\ J_2 = -x^2 e^{1-x} + J_1 \end{cases}$$
en faisant la somme membre à membre on obtient :
$$J_n = -e^{1-x}\left(x^n + x^{n-1} + \dots + x^2\right) + J_1$$
$$J_n = -e^{1-x}\left(x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1\right) + e$$

si $x = 1$ alors $J_n = e - n$

si $x \neq 1$ alors $J_n = -e^{1-x} \cdot \dfrac{x^n - 1}{x - 1} + e$

Exercice 3

a/ $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n+1} - x^n(1-x)^n \, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^n \left(x(1-x) - 1\right) dx$

$$= \int_0^1 x^n (1-x)^n \left(-x^2 + x - 1\right) dx$$

le discriminant de $-x^2 + x - 1$ est $\Delta = -3 < 0 \Rightarrow \forall x : -x^2 + x - 1 < 0$

de plus $\forall x \in [0,1]$: $x^n (1-x)^n \geq 0$ d'où $x^n (1-x)^n (-x^2 + x - 1) \leq 0$

et par suite $I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow (I_n)$ décroissante

- $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n (1-x)^n \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 0 \, dx \leq I_n \leq \int_0^1 1 \, dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq 1$$

b/ (I_n) décroissante et minorée par 0 donc convergente

- $u(x) = x - x^2$ $\quad u'(x) = 1 - 2x$

x	0		$1/2$		1
u'		$+$	0	$-$	
u	0	↗	$1/4$	↘	0

$\forall x \in [0,1] \quad 0 \leq x - x^2 \leq 1/4 \Rightarrow 0 \leq \left(x(1-x)\right)^n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^n dx$

$\lim_{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{\infty} I_n = 0$ d'où $0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Exercice 4

- $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx = \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1 = 1 - \ln 2$; $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$
- $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$ car $-1 \leq x - 1 \leq 0 \Rightarrow x^{n+1} \leq x^n \Rightarrow \dfrac{x}{1+x^n} \leq \dfrac{x}{1+x^{n+1}} \Rightarrow I_n \leq I_{n+1}$
- $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x}{1+x^n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq 1 \Rightarrow (I_n)$ converge
- $1 - x^n \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1 \Rightarrow x(1-x^n) \leq \dfrac{x}{1+x^n} \leq x \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 x(1-x^n)\,dx \leq I_n \leq \int_0^1 x \, dx$

d'où $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\lim_{\infty} I_n = 1/2$

et encore plus..